UVOD U NUMERIČKU MATEMATIKU

Zadaci za vježbu: Gaussove eliminacije

1. Neka je $A \in M_4(\mathbb{R})$ matrica zadana s
$$A := \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & -1 & 2 \\ 2 & -4 & 0 & 6 \\ 1 & 3 & -1 & 3 \end{bmatrix}.$$
   (a) Pokažite da matrica A dopušta LU-faktorizaciju.
   (b) Odredite LU-faktorizaciju od A
   (c) Koristeći dobivenu LU-faktorizaciju od A, nađite $x \in \mathbb{R}^4$ koji je rješenje sustava $Ax = y$, ako je $y := \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^\tau$.

2. Odredite sve $\lambda \in \mathbb{R}$ za koje matrica
$$A := \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 & -1 \\ -2 & \lambda & -1 & -1 \\ 4 & \lambda & 7-\lambda & -2 \\ 2 & -2\lambda & 2-\lambda & 6 \end{bmatrix}.$$
dopušta LU-faktorizaciju.

3. Neka je $A \in M_4(\mathbb{R})$ matrica zadana s
$$A := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 5 \end{bmatrix}.$$
   (a) Pokažite da matrica A ne dopušta LU-faktorizaciju.
   (b) Koristeći parcijalno pivotiranje odredite PLU-faktorizaciju od A.
   (c) Koristeći dobivenu PLU-faktorizaciju od A, nađite $x \in \mathbb{R}^4$ koji je rješenje sustava $Ax = y$, ako je $y := \begin{bmatrix} 2 & 8 & 6 & -4 \end{bmatrix}^\tau$.

4. Za matricu $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ kažemo da je *striktno dijagonalno dominantna* ako vrijedi
$$\sum_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{ij}| < |a_{ii}|, \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}.$$
Dokažite da svaka striktno dijagonalno dominantna matrica dopušta LU-faktorizaciju.

5*. Dokažite slijedeće tvrdnje:
   (a) Ako je $B \in M_n(\mathbb{R})$ takva da je $\|B\| < 1$, tada je $I + B \in GL_n(\mathbb{R})$ i vrijedi
$$\|(1+B)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|B\|}$$
   (b) Ako je $A \in GL_n(\mathbb{R})$ i neka je $\Delta A \in M_n(\mathbb{R})$ takva da je $\|\Delta A\| < 1/\|A^{-1}\|$. Tada je $A + \Delta A \in GL_n(\mathbb{R})$ i vrijedi ocjena
$$\|(A + \Delta A)^{-1}\| \leq \frac{1}{\|A^{-1}\|^{-1} - \|\Delta A\|}.$$
   (c) Ako je $A \in GL_n(\mathbb{R})$ i $B \in M_n(\mathbb{R}) \setminus GL_n(\mathbb{R})$ tada je $\frac{1}{\|A^{-1}\|} \leq \|A - B\|$.
   (d) Ako je $A \in GL_n(\mathbb{R})$ tada vrijedi
$$\frac{1}{\operatorname{cond}(A)} \leq \min\left\{ \frac{\|A - B\|}{\|A\|} : \ B \in M_n(\mathbb{R}) \setminus GL_n(\mathbb{R}) \right\}.$$

I.G.